Calcolo della Massa della Terra M_T dalla misura di g

La forza di attrazione gravitazionale esercitata dalla Terra su di una massa ***m***, sulla sua superficie, è: $F = G\frac{mM_T}{R_T^2}$ dove ***G*** è la costante di gravitazione universale***,*** **M_T** la massa della Terra, **R_T** il raggio terrestre. Questa Forza è usualmente chiamata il "peso" della massa m e si scrive come: $F = m \cdot g$, dove *g* è l'accelerazione gravitazionale che vale quindi $g = G\frac{M_T}{R_T^2}$, la massa ***M_T*** può quindi essere calcolata dalla relazione:

$$M_T = \frac{g \cdot R_T^2}{G}$$

Per calcolare la Massa della Terra servono quindi i valori delle tre grandezze ***G, R_T, g.*** Tutte e tre le grandezze si possono misurare.
Voi misurerete ***g***, assumendo come noti i valori di ***G e R_T***.
I valori da inserire nella formula per trovare la massa della Terra ***M_T*** sono:

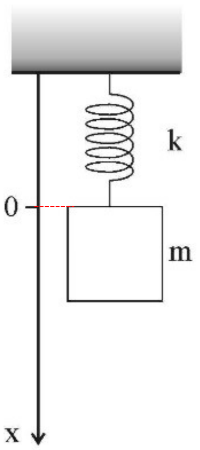
g = il valore misurato da voi, in unità del Sistema Internazionale S.I. [m/s^2]

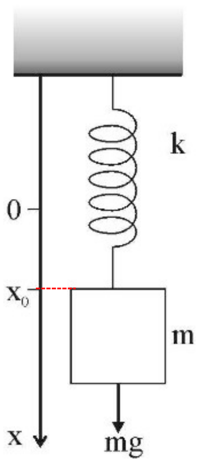
R_T = 6314 km, valore misurato da Eratostene nel 240 a.C.

G = 6,7 10^{-11} S.I.[$m^3/kg \cdot s^2$], valore misurato da H. Cavendish nel 1798.

Misura di g utilizzando una molla e dei pesi – Teoria

1) In condizioni di equilibrio la massa **m** appesa alla molla, di costante elastica **k**, la allunga di **x_0** rispetto alla posizione di equilibrio senza massa appesa.





2) Se si sposta **delicatamente** la massa dalla posizione di equilibrio, e la si lascia andare, la massa comincia ad oscillare verticalmente, con un moto armonico di periodo **T.**

Per ogni massa (gruppo di masse) appesa m misurerete due grandezze: l'allungamento x e il periodo dell'oscillazione verticale T.
Le relazioni matematiche fra le masse m, le masse equivalenti m_e, gli allungamenti x, le durate dei periodi T, la costante k della molla e g (dalle leggi di Newton e Hooke) sono:

$$x(m) = \frac{g}{k} \cdot m = \mathbf{a} \cdot m \quad ; \quad m_e(T) = \frac{k}{(2\pi)^2} \cdot T^2 = \mathbf{b} \cdot T^2$$

Voi dovrete ricavare graficamente le due costanti **a e b (vedi dopo come fare),** utilizzando le grandezze misurate che sono:

m = la massa dei pesi di piombo appesi alla molla – La misurate con una bilancia.

x(m) = l'allungamento corrispondente – Lo misurate leggendo il valore sulla carta millimetrata dietro la molla.

T= il periodo di una oscillazione con la massa **m** appesa. Lo calcolate misurando il periodo T_{10} di 10 oscillazioni (oppure di 15...20) e poi dividendo il periodo di 10 oscillazioni per 10 (15... 20).

Le masse **m_e** si calcolano dalle masse **m** e dai dati seguenti:

m_e = masse dei pesi in piombo + massa equivalente della molla = **m(pesi) + m_e (molla)= m (pesi) + 42,2 g**

dove m_e (molla) $\cong$ 42,2 $\pm$ 0,4 g [calcolata sommando la massa del supporto con quella delle spire libere o fisse].

Avendo ricavato dai grafici i valori di **a=g/k** e **b=k/(2π)²** si procederà così:

1) Dal valore di **b** si calcola **k**, la costante elastica della molla: **k**= b · (2π)²= b · 40
2) Dal valore di **a** e di **k** si calcola l'accelerazione di gravità: **g** = a · k
3) Dal valore di g, di G e di R_T si calcola la massa della Terra $\mathbf{M_T} = \frac{g \cdot R_T^2}{G}$

Protocollo delle misure da fare

1) Pesare i gruppi di masse: m_4 = 4 masse ; m_6 = 6 masse ; m_8 = 8 masse ; m_{10} = 10 masse
2) Mettere i gruppi di masse $\mathbf{m_i}$ (di cui avete già misurato la massa) sul supporto della molla; 4 dischi(m_4), poi 6 dischi(m_6), poi 8 dischi(m_8), poi 10 dischi (m_{10}).
3) Per ogni gruppo di masse + molla vanno eseguite due misure:

    - l'allungamento $\mathbf{x_i}$ della molla a riposo.
    - La durata di n=10 periodi di oscillazione $\mathbf{T_n}$ = $\mathbf{nT_i}$. Per ogni gruppo di masse $\mathbf{m_i}$ rifare la misura almeno 3 volte.
    - Fare una tabella: una serie di misure (gruppi di masse) per ogni riga.

# masse	m_i (g)	x_i (cm)	T_i (10 osc) (s)	T_i (1)	T_i $(1)^2$	Massa m_{ei}
4..6..8..10	misura	misura	Misura	Calcolo	calcolo	calcolo

Elaborazione dei dati e calcolo di M_T

NOTA: ogni gruppo (tavolo) avrà una molla diversa e masse diverse, quindi i valori intermedi delle varie grandezze possono anche essere molto differenti, è la massa della Terra alla fine che dovrà essere circa la stessa.

Nei grafici riportare le grandezze nel Sistema Internazionale [kg, m, s] così non dovrete fare le equivalenze.

1) Grafico 1 (utilizzando masse m e allungamenti x): si ottiene **a=g/k**

a. Riportare su di un grafico **lineare** le coppie **(m_i, x_i)**; **m in orizzontale, x in verticale.**
b. Tracciare la retta migliore ad occhio che passa per i punti sperimentali. Nota: la retta NON passa per l'origine!
c. Calcolare il coefficiente angolare **a = Δx /Δm** della retta, che sarà uguale a **g/k**.
d. **Deve** venire un valore per **a** circa **0,19 < a < 0,27** [m/Kg]. Se è molto al di fuori dell'intervallo indicato vuol dire che è stato commesso un errore grossolano in qualche misura, o in qualche unità di misura, o nel riportare i punti sul grafico, o nel valutare il coefficiente angolare.

2) Grafico 2: (utilizzando le masse equivalenti m_e e i periodi al quadrato T^2): si ottiene **b=k/40**

a. Per ogni gruppo di masse $\mathbf{m_i}$ calcolare la rispettiva massa equivalente $\mathbf{m_{ei} = m_i + 42{,}2\ g}$
b. Per ogni massa $\mathbf{m_{ei}}$ calcolare il valor medio del periodo T_i (T è il periodo di 1 oscillazione, quindi se ne avete misurate 10 il periodo sarà T(1 oscillazione)=T(10 oscillazioni)/10 , facendo la media aritmetica dei valori ottenuti.
c. Riportare su di un grafico **lineare**, le coppie **(T^2(i), m_{ei})**; **T^2 in orizzontale, m_e in verticale.**
d. Calcolare il coefficiente angolare $\mathbf{b = \Delta m_e /(\Delta T^2)}$ e da questo la costante elastica della molla **k**:

$$\mathbf{k} = b \cdot (2\pi)^2 = b \cdot 4 \cdot \pi^2 = b \cdot 4 \cdot \pi^2 \cong b \cdot 4 \cdot 10 = \mathbf{b \cdot 40} \quad [N/m]$$ [1]

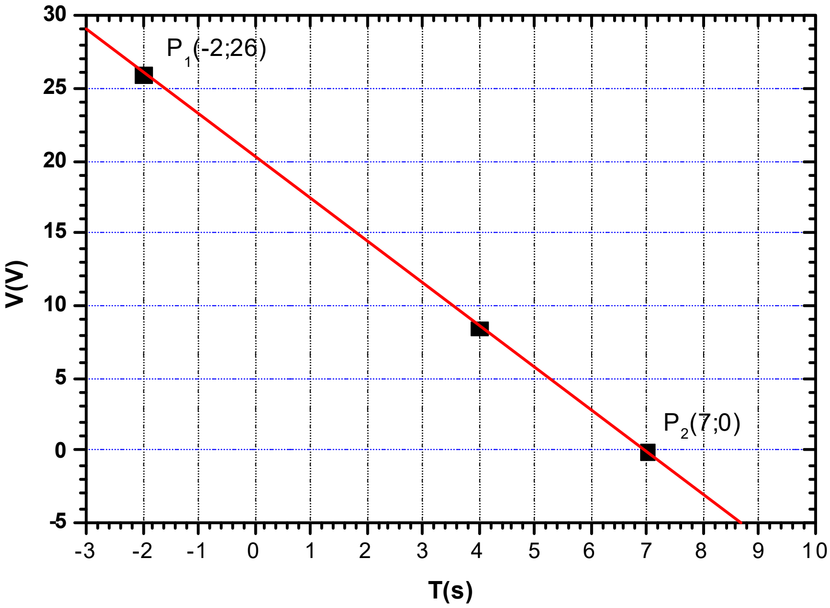
3) Utilizzare i valori di ***k*** e di ***a*** ricavati dai due grafici per calcolare **g = a· k**

[1] Nota: π^2 = 9,8696..., utilizzando π^2 = 10 facciamo un errore del 1,3%, trascurabile rispetto alle altre incertezze sperimentali.

4) Calcolo della massa della Terra: $\mathbf{M_T = \left(g \cdot R_T^2\right)/G}$. Fare anche una valutazione dell'incertezza della misura.

Nota: La massa della terra è circa: $M_T \sim 6 \cdot 10^{24}$ kg.

Calcolo grafico del coefficiente angolare "a" per una funzione lineare del tipo: y(x)=ax+b



a = Δy/Δx, (è il caso in cui i punti sperimentali stanno su di una retta in scala lineare).
Esempio (vedi grafico): si scelgono **due punti della retta "lontani"**,(il calcolo è più preciso), ad esempio: P_1 (x_1 ; y_1) e P_2 (x_2 ; y_2).
Nota: i punti P_1 e P_2 sono rispettivamente quello più vicino (P_1) e quello più lontano (P_2) dall'origine in basso a sinistra.

Calcolo di **a**, utilizzando i due punti P_1(-2,26) , P_2(7,0) :

$$\mathbf{a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 26}{7 + 2} = \frac{-26}{9} \cong -2,9 \quad V/s}$$

L'incertezza di **a** è legata alla dispersione dei punti ed alla loro incertezza intrinseca.

Incertezze

Nel vostro caso le maggiori incertezze si hanno nella misura degli allungamenti e nella misura dei periodi. La misura delle masse fatte con la bilancia digitale dà un contributo trascurabile alle incertezze. Nel caso che i punti sui grafici siano "abbastanza" allineati, come incertezza totale sul valore della Massa della Terra si può dare il 20% circa.
Questo vuol dire che se il calcolo ha dato, per esempio, $M_T = 5,4756 \cdot 10^{24}$ kg, la sua incertezza sarà:
$\frac{\Delta M}{M} = 20\% = 0,2$ Da cui: $\Delta M = M \cdot 0,2 = 1,0951 \cdot 10^{24}$ kg e il valore sarà (vedi dopo su come fare le approssimazioni: $M \pm \Delta M = (5,4756 \pm 1,0951) \cdot 10^{24} = (5,5 \pm 1,1) \cdot 10^{24}$ kg

---

Cifre significative

Quando si scrive il risultato di una misura o di un calcolo bisogna scegliere con quante "cifre significative" scrivere il numero.

DEFINIZIONE di "cifre significative" : le cifre significative (c.s.) di un numero sono il numero di cifre contate da sinistra verso destra a partire dall'ultimo zero, se ci fossero degli zeri a sinistra.

Esempio: 312 0,312 31,2 0312 00312 78,6 300 hanno tutti 3 c.s. (gli zeri a destra contano come c.s.)

Con quante cifre significative devo scrivere un numero?

Esempio voglio calcolare l'area di un quadrato di lato L= 2,731 cm, il calcolo mi darebbe $A= L^2= 7{,}45836\ cm^2$. Con quante c.s. devo scrivere questo numero? La regola è che bisogna prima fissare le c.s. dell'incertezza, e poi stabilire le cifre del valore della grandezza.

Si fa così: Supponiamo di avere una misura con la sua incertezza, con tante cifre (tutte quelle che dà la calcolatrice per esempio)

1) Si prende il numero dell'incertezza e la si arrotonda in modo che abbia **2** c.s. Esempio:

L'incertezza così come viene dai calcoli	Come si scrive (con 2 sole cifre)
1,2	1,2
1,2875	1,3
0,12875	0,13
0,00316	0,0032
71357	$71 * 10^3$
71000	$71 * 10^3$

A questo punto, avendo l'incertezza scritta con 2 c.s., si arrotonda il valore della misura in modo che l'ultima cifra della misura (come posizione) si trovi nella stessa posizione dell'ultima cifra dell'incertezza, quella più a destra. La cosa più comoda è metterle una sotto l'altra e poi vedere quali cifre tagliare. La misura e l'incertezza devono essere scritte con la stessa unità di misura, altrimenti le cifre "si spostano".

<u>Esempio</u>

Incertezza:	0,2**1**	0,2**1**	0,2**1**
Misura:	31,3~~45~~ → 31,34	31,0**0** → 31,00	31,3~~37333~~ → 31,34
Come si scrive:	31,34 ± 0,21	31,00 ± 0,21	31,34 ± 0,21

....

Incertezza:	2,**1**	0,2**1**	0,2**1**	0,006**5**
Misura:	31,~~345~~ → 31,3	31,0**0** → 31,00	31,3~~37333~~ → 31,34	31,337~~333~~ → 31,3373
Come si scrive	31,3 ± 2,1	31,00 ± 0,21	31,34 ± 0,21	31,3373 ± 0,0065

Quindi alla fine devo avere sempre l'incertezza con 2 c.s. e il numero che "finisce" nella stessa posizione della seconda cifra dell'incertezza.